



RR-0616

First Year B. Sc./B. A. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - I

(Algebra, Trigonometry & Vector Calculus)

(New Course)

Time : Hours]

[Total Marks : 105

સૂચના : (૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :
F. Y. B. Sc./B. A.

Name of the Subject :
Mathematics : Paper - 1

Subject Code No. : 0 6 1 6 Section No. (1, 2,.....): Nil

Seat No. :

Student's Signature

(૨) જમણી બાજુનાં અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(૩) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ (અ) માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો :

૫

(૧) ઇ' મોવ્રેનું પ્રમેય લખો.

(૨) $\cos 10\theta$ ના વિસ્તરણનું છેલ્લું પદ શોધો.

(૩) પ્રતિ-હર્મેટીઅન શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.

(૪) કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેય લખો.

(૫) સદિશ બિંદુ વિધેયના 'અપરિભ્રમણશીલ (Irrotational) હોવા માટેની શરત જણાવો.

(બ) નીચેનાની ગણતરી કરીને જવાબ આપો :

(૧) $[\sin \theta - i \cos \theta]^{-2}$ ની કિંમત શોધો.

(૨) $\tan^{-1} \left\{ \frac{x-a}{x+a} \right\} = \frac{1}{2} \log_e \left\{ \frac{x}{a} \right\}$; સાબિત કરો.

(૩) ચોરસ શ્રેણિક A માટે, AA^T કયો શ્રેણિક છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

(૪) જો $\vec{r} = 3t^2 \hat{i} + (t^2 - 2t) \hat{j} + t^3 \hat{k}$ હોય, તો $\frac{d\vec{r}}{dt}$ તથા $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ શોધો.

(૫) જો $f = x^2y + y^2x + z^2$ હોય, તો $(1, 0, -2)$ બિંદુએ $\text{grad } f$ શોધો.

૨ (અ) ઇ' મોવ્રેનું પ્રમેય પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે સાબિત કરો.

૬

- (બ) જો $\alpha = 1+i, \beta = 1-i, \cos \phi = x+1$ તથા $\tan \theta = \sec \phi$ હોય, તો સાબિત કરો કે :

$$\frac{(x+\alpha)^n - (x+\beta)^n}{\alpha-\beta} = \sin(n\theta) \cdot \operatorname{cosec}^n \theta.$$

- (ક) સાબિત કરો કે :

$$1 - \cos 10\theta = 2 \left[16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta \right]^2.$$

અથવા

- ૨ (અ) $\cos h^{-1}x$ ની કિંમત શોધો.

- (બ) સાબિત કરો :

$$(૧) \frac{\cos h\theta}{1+\sin h\theta} + \frac{1-\sin h\theta}{\cos h\theta} = \frac{2 \sec h\theta}{1+\sin h\theta}.$$

$$(૨) \sec h^4 A - \sec h^2 A = \tan h^4 A - \tan h^2 A.$$

- (ક) સાબિત કરો કે : $\sin h^{-1}(\tan x) = \log_e \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right\}.$

- ૩ (અ) θ ની કોઈ પણ વાસ્તવિક કે સંકર કિંમત માટે, સાબિત કરો કે $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ અને તે પરથી $\cos \theta$ તથા $\sin \theta$ ની કિંમત શોધો.

- (બ) (૧) સાબિત કરો : $\left\{ \sin(\alpha+\beta) - e^{i\alpha} \sin \beta \right\}^n = \sin^n \alpha - e^{-in\beta}.$

- (૨) $\sin(x+iy)$ નું તેના વાસ્તવિક તથા કાલ્પનિક અંશોમાં વિયોજન કરો.

- (ક) જો $\cos h(u+iv) = x+iy$ હોય, તો સાબિત કરો કે :

$$(૧) \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1 \text{ અને; } (૨) \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1.$$

અથવા

- ૩ (અ) સાબિત કરો કે

$$\operatorname{Log}_e (\cos \theta + i \sin \theta) = (2n\pi + \theta) i \text{ અને તે પરથી તારવો કે :}$$

$$(૧) \operatorname{Log}_e (-1) = (2n+1)\pi i \text{ અને } (૨) \operatorname{Log}_e (-i) = \left(2n - \frac{1}{2} \right) \pi i$$

- (બ) $\operatorname{Log}_e (1-i)$ ની કિંમત શોધો.

- (ક) જો $\tan^{-1}(x+iy) = \alpha + i\beta$ હોય, તો સાબિત કરો કે;

$$(૧) x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1; \text{ અને}$$

$$(૨) x^2 + y^2 - 2y \cot h 2\beta + 1 = 0.$$

- ૪ (અ) વિસંમિત તથા હર્મિટીઅન શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. દર્શાવો કે હર્મિટીઅન શ્રેણિકના તમામ વિકર્ણી ઘટકો વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે. ૬
- (બ) સાબિત કરો : ૬
- (૧) ચોરસ શ્રેણિક A માટે, $A - A^0$ એ પ્રતિ-હર્મિટીઅન શ્રેણિક છે.
- (૨) જો A એ સંમિત શ્રેણિક હોય, તો કોઈપણ શ્રેણિક B માટે, $B^T A B$ એ પણ સંમિત શ્રેણિક છે.
- (ક) n -અવ્યક્ત ચલોની સુરેખ સંહિતો $A_1 \cdot X = B_1$ તથા $A_2 \cdot X = B_2$ ક્યારે સમકક્ષ કહેવાય ? દર્શાવો કે ૬

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{array} \right\} \text{ તથા } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ 2z = 2 \end{array} \right.$$

એ સમકક્ષ સંહિતો છે.

અથવા

- ૪ (અ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{bmatrix}$ ને હાર-સોપાન સ્વરૂપમાં દર્શાવો. ૬

- (બ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ નો હાર-કોટ્યાંક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ૬

ઉપયોગ કરીને શોધો.

- (ક) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ૬

ઉપયોગ કરીને શોધો.

- ૫ (અ) નીચે આપેલ સુરેખ સમપરિમાણ (H) સંહિતને ઉકેલો : ૬
- $$\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ y + z = 0. \end{array}$$
- (બ) નીચે આપેલ સુરેખ અસમપરિમાણ (NH) સંહિત સુસંગત છે કે નહીં તે નક્કી કરો અને સુસંગત હોય તો તેને ઉકેલો : ૬
- $$\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1. \end{array}$$

(ક) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ના આત્મ-મૂલ્યો શોધો અને તેમાંના સૌથી મોટા €

આત્મ-મૂલ્યને સંગત આત્મ-સદિશો મેળવો.

અથવા

૫ (અ) અનુરૂપ શ્રેણિકોની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરોકે અનુરૂપ શ્રેણિકોના આત્મ-મૂલ્યો સમાન હોય છે. €

(બ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ માટે કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેયનું સમર્થન કરો. €

(ક) સાબિત કરો કે પ્રતિ-હર્મેટીઅન શ્રેણિકના આત્મ-મૂલ્યો શૂન્ય કે કાલ્પનિક સંખ્યા હોય છે. €

૬ (અ) જો \vec{a} તથા \vec{b} એ અદિશ ચલ t ના વિકલનીય સદિશ વિધેયો હોય, €

તો $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ શોધો અને તે પરથી સાબિત કરો કે

$$a \frac{da}{dt} = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

(બ) જો $\vec{r} = (\sin h \lambda t) \hat{i} + (\cosh \lambda t) \hat{j}$ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \lambda^2 \vec{r} = \vec{0}. \text{ તદુપરાંત } \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ શોધો. } \text{€}$$

(ક) જો $\vec{a} = t^2 \hat{i} - t \hat{j} + (2t+1) \hat{k}$ તથા $\vec{b} = (2t-3) \hat{i} + \hat{j} - t \hat{k}$ હોય, €

તો $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ તથા $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b})$ શોધો.

અથવા

૬ (અ) સદિશબિંદુ વિધેય \vec{f} ના 'કર્લ (Curl)'ની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે €

$$\text{Curl}(\phi \vec{V}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{V} + \phi \text{Curl } \vec{V}.$$

(બ) જો $\vec{f} = (x^2 - y^2) \hat{i} + 2xy \hat{j} + (y^2 - xy) \hat{k}$ હોય, તો $\text{div } \vec{f}$ તથા €

$\text{Curl}(\text{Curl } \vec{f})$ શોધો.

- (ક) સદિશ બિંદુ વિધેયના ૬
 'સોલેનોઈડલ (Solenoidal)' હોવા માટેની શરત જણાવો. સદિશ બિંદુ
 વિધેય

$$\vec{f} = x^2 y \hat{i} - 2xz \hat{j} + 2yz \hat{k}$$

માટે $Curl \vec{f}$ શોધો તથા $Curl \vec{f}$ 'સોલેનોઈડલ' છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the Instruction no. 1 of page no. 1.
 (2) Figures to the **right** indicate marks.
 (3) Follow usual notations.

- 1 (a) Answer as directed : 5

- (1) State De'Moivre's theorem.
 (2) Find the last term in the expansion of $\cos 10\theta$.
 (3) Define Skew-Hermitian matrix.
 (4) State Cayley-Hamilton theorem.
 (5) State the condition for a vector-point function to be 'Solenoidal'.

- (b) Answer the following by computing : 10

- (1) Find the value of $[\sin \theta - i \cos \theta]^{-2}$.
 (2) Prove that : $\tan h^{-1} \left\{ \frac{x-a}{x+a} \right\} = \frac{1}{2} \log_e \left\{ \frac{x}{a} \right\}$.
 (3) Which kind of matrix AA^T is, for a square matrix A ? Justify your answer.
 (4) If $\vec{r} = 3t^2 \hat{i} + (t^2 - 2t) \hat{j} + t^3 \hat{k}$ then find $\frac{d\vec{r}}{dt}$ and $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.
 (5) If $f = x^2y + y^2x + z^2$, then find $\text{grad } f$ at the point $(1, 0, -2)$.

- 2 (a) Prove De'Moivre's theorem for integers. 6

- (b) If $\alpha = 1+i$, $\beta = 1-i$, $\cos \phi = x+1$ and $\tan \theta = \sec \phi$, then 6
 prove that

$$\frac{(x+\alpha)^n - (x+\beta)^n}{\alpha - \beta} = \sin(n\theta) \cdot \text{cosec}^n \theta.$$

- (c) Prove that : $1 - \cos 10\theta = 2 [16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta]^2$. 6

OR

- 2 (a) Find the value of $\cos h^{-1}x$. 6

- (b) Prove that : 6

$$(1) \frac{\cos h \theta}{1 + \sin h \theta} + \frac{1 - \sin h \theta}{\cos h \theta} = \frac{2 \sec h \theta}{1 + \sin h \theta}.$$

$$(2) \quad \sec h^4 A - \operatorname{sech}^2 A = \tan h^4 A - \tan h^2 A.$$

$$(c) \quad \text{Prove that : } \sin h^{-1}(\tan x) = \log_e \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right\}.$$

3 (a) For any real or complex value of θ , prove that **6**

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, and hence obtain the value of $\cos \theta$ and $\sin \theta$.

(b) (1) Prove that :

$$\left\{ \sin(\alpha + \beta) - e^{i\alpha} \sin \beta \right\}^n = \sin^n \alpha - e^{-in\beta}.$$

(2) Separate $\sin(x + iy)$ into its real and imaginary parts.

(c) If $\cos h(u + iv) = x + iy$, then prove that :

$$(1) \quad \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1 \quad \text{and} \quad (2) \quad \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1.$$

OR

3 (a) Prove that : **6**

$\operatorname{Log}_e(\cos \theta + i \sin \theta) = (2n\pi + \theta)i$ and hence deduce that

$$(1) \quad \operatorname{Log}_e(-1) = (2n+1)\pi i \quad \text{and} \quad (2) \quad \operatorname{Log}_e(-i) = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi i$$

(b) Find the value of $\operatorname{Log}_e(1-i)$. **6**

(c) If $\tan^{-1}(x + iy) = \alpha + i\beta$, then prove that :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1; \quad \text{and} \quad (2) \quad x^2 + y^2 - 2y \cot h 2\beta + 1 = 0.$$

4 (a) Define skew-symmetric and Hermitian matrix. Show that **6**

all diagonal elements of a Hermitian matrix are real numbers.

(b) Prove that : **6**

(1) $A - A^0$ is a Skew-Hermitian matrix; for square matrix A .

(2) If A is a symmetric matrix, then for any matrix

B , $B^T A B$ is also a symmetric matrix.

(c) When two linear systems $A_1 \cdot X = B_1$ and $A_2 \cdot X = B_2$ **6**

of equations in n -unknowns are called equivalent? Show that the following systems are equivalent :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ 2z = 2 \end{array} \right.$$

OR

- 4 (a) Express a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{bmatrix}$ in to the Row-Reduced **6**

Echelon form.

- (b) Find the row-rank of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ by **6**

applying elementary row-operations.

- (c) Find the inverse of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ by applying **6**

elementary row-operations.

- 5 (a) Solve the following homogeneous (H) system of linear **6**
equations :

$$x + 2y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 0$$

$$3x + 2y + 2z = 0$$

$$y + z = 0.$$

- (b) Check whether the following non-homogeneous (NH) **6**
system of linear equations is consistent and solve if it
is consistent :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1.$$

- (c) Find the eigen-values of a matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ and **6**

obtain the eigen-vectors corresponding to the largest
eigen-value among them.

OR

- 5 (a) Define similar matrices. Prove that the eigen-values **6**
of two similar matrices are same.

- (b) Justify Cayley-Hamilton theorem for a matrix **6**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(c) Prove that the eigen-values of a skew-Hermitian matrix are zero or purely imaginary. **6**

6 (a) If \vec{a}, \vec{b} are differentiable vectors of a scalar variable t , then find $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ and hence prove that : **6**

$$a \frac{da}{dt} = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

(b) If $\vec{r} = (\sin h \lambda t) \hat{i} + (\cosh \lambda t) \hat{j}$ then prove that

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \lambda^2 \vec{r} = \vec{o}. \text{ More over, find } \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad \mathbf{6}$$

(c) If $\vec{a} = t^2 \hat{i} - t \hat{j} + (2t+1) \hat{k}$ and $\vec{b} = (2t-3) \hat{i} + \hat{j} - t \hat{k}$, then **6**

$$\text{find } \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ and } \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

OR

6 (a) Define the 'Curl' of a vector-point functions \vec{f} . **6**
Prove that

$$\text{Curl}(\phi \vec{V}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{V} + \phi \text{Curl } \vec{V}.$$

(b) If $\vec{f} = (x^2 - y^2) \hat{i} + 2xy \hat{j} + (y^2 - xy) \hat{k}$ then find $\text{div } \vec{f}$ and **6**
 $\text{Curl}(\text{Curl } \vec{f})$.

(c) State the condition for a vector-point function to be **6**
'Solenoidal'. For a vector-point function

$$\vec{f} = x^2 y \hat{i} - 2xz \hat{j} + 2yz \hat{k}$$

Find $\text{Curl } \vec{f}$ and check whether $\text{Curl } \vec{f}$ is 'Solenoidal'.